Über iterierte Exponentialformeln*

Leonhard Euler

§1 Neulich hat der illustre Marchio De Condorcet sehr tiefe Betrachtungen über nahezu gänzlich unübliche analytische Formeln mit der der Akademie geteilt, unter welchen die Formeln den ersten Platz einnehmen, welche sich hier iterierte Potenzen nennen lassen, weil ja jede beliebige Potenz in einen Exponenten der folgenden Potenz übergeht; ein Ausdruck von dieser Art pflegt für gewöhnlich auf diese Weise dargestellt zu werden

$$r^{r^{r^{r^{\alpha}}}}$$

Weil ja aber die Natur von solchen Ausdrücken immer noch kaum verstanden ist, kann auch die Kraft jener mit unglaublichem Scharfsinn unternommenen Untersuchungen keineswegs klar verstanden und erfasst werden; dieser Sache wegen wird es nicht unnütz sein, an dieser Stelle die wesentlichen Eigenschaften solcher Ausdrücke zu erklären.

§2 Für dieses Ziel, weil der oberste Exponent als α festgelegt worden ist, die wiederholt zu erhebende Größe aber mit dem Buchstaben r bezeichnet wird, wollen wir die erste Potenz $r^{\alpha} = \beta$ setzen und nun wird β der Exponent der zweiten Potenz sein

$$r^{r^{\alpha}} = r^{\beta},$$

*Originaltitel: "De formulis exponentialibus replicatis", zuerst publiziert in: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1777: I* (1778, geschrieben 1777): pp. 38 – 60, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 15, pp. 268 – 297, Eneström Nummer E489, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

welche wir weiter mit dem Buchstaben γ bezeichnen wollen; weil dieser der Exponent der dritten Potenz ist, wollen wir in gleicher Weise $r^\gamma = \delta$ setzen, dann aber weiter $r^\delta = \varepsilon$, $r^\varepsilon = \zeta$ etc., sodass auf diese Weise die ganze Aufgabe auf die Progression der Buchstaben α, β, γ, δ, ε, ζ etc. zurückgeführt wird, von welchen ein beliebiger gefunden wird, wenn die feste Größe r zur vorhergehenden erhoben wird; also wird das Fortschreitungsgesetz auf diese Weise sehr deutlich vor Augen geführt

$$\beta = r^\alpha, \quad \gamma = r^\beta, \quad \varepsilon = r^\delta, \quad \zeta = r^\varepsilon,$$

woher sofort klar ist, wenn wir mit $\alpha = 0$ angefangen, dass $\beta = 1$ und $\gamma = r$ sein wird, die folgenden aber

$$\delta = r^r, \quad \varepsilon = r^{r^r} \quad \text{etc.}$$

§3 Hier ist zuerst ersichtlich, wenn für r eine mäßig große Zahl genommen wird, dass die Terme unserer Reihe schnell ins Unermessliche wachsen; wenn wir nämlich nur $r = 2$ nehmen, werden für $\alpha = 0$ gesetzt, dass $\beta = 1$ und $\gamma = 2$ ist, die folgenden Terme $\delta = 4$, $\varepsilon = 16$, $\zeta = 65536$ sein, wo niemand einen dermaßen großen Term η leicht entwickeln wird, weil er freilich aus 19729 Ziffern besteht. Daher ist schon offensichtlich, wenn wir für r eine noch größere Zahl nehmen würden, dass unsere Reihe α, β, γ etc. um vieles schneller ins Unendliche wachsen würde. Andererseits wird schnell eingesehen, wenn anstelle von r Zahlen kleiner als zwei angenommen werden, dass eine Vermehrung von dieser Art um vieles langsamer von statten gehen wird, weil ja für den Fall $r = 1$ alle Terme unserer Reihe bis ins Unendliche immer der Einheit gleich bleiben werden.

§4 Hier ergibt sich sofort die Frage von größter Bedeutung, wo diese enorme Vermehrung beginnt; denn diese Vermehrung beginnt nicht, sobald die Zahl r die Einheit überschreitet, was ausreichen wird es anhand eines einzigen Falles gezeigt zu haben, in welchem $r = \sqrt{2}$ genommen wird, wo wir sogar dem ersten Exponenten α nun einen größeren Wert zuteilen wollen als $\sqrt{2}$. Es sei natürlich $\alpha = 2$ und es wird $\beta = 2$ und daher weiter $\gamma = 2$ hervorgehen, und so werden schließlich alle Terme unserer Progression keine Vermehrung erfahren, während alle gleich zwei bleiben. Ja, dieses Phänomen wird sogar auftreten, wenn wir dem ersten Exponenten α einen noch größeren Wert zuteilen, nämlich $\alpha = 4$; denn dann wird $\beta = 4$ und $\gamma = 4$ hervorgehen; und es wird keine weitere Vermehrung mehr auftreten; sobald aber α über 4 hinaus vermehrt wird, wie wenn $\alpha = 6$ genommen wird, dann wird man $\beta = 8$ und daher weiter $\gamma = 16$, $\delta = 256$ finden; diese folgenden werden sich wegen der riesigen Größen hingegen kaum und nicht einmal kaum ausdrücken lassen.

§5 Weil also im Fall $r = \sqrt{2}$, wenn man von $\alpha = 0$ aus beginnt, die Vermehrung der Terme nicht über eine mäßige Größe hinaus wächst, während sie für $r = 2$ quasi plötzlich uns Unendliche anwächst, wird es ohne Zweifel der Mühe Wert sein, diese Grenze anzugeben, wo diese Vermehrung beginnt; bevor wir diese aus den Prinzipien der Analysis heraus bestimmen, wird es nicht fern von der Sache sein, gewisse Fälle innerhalb der Grenzen $\sqrt{2}$ und 2 einer Untersuchung zu unterwerfen, was sich als leichte Aufgabe mit Logarithmen erledigen lassen wird. Weil nämlich $\beta = r^{\alpha}$ ist, wird

$$\log \beta = \alpha \log r$$

und

$$\log \log \beta = \log \alpha + \log \log r$$

sein und in gleicher Weise wird

$$\log \log \gamma = \log \beta + \log \log r$$

sein, dann aber

$$\log \log \delta = \log r + \log \log r$$

und so weiter. Auf diese Weise wollen wir also den Fall untersuchen, in dem $r = \frac{3}{2}$ ist, woher

$$\log r = 0,1760913$$

und

$$\log \log r = 9,2457378$$

wird, und weil wir, wenn wir die Reihe mit Null beginnen, sofort zum Term $\frac{3}{2}$ gelangen, wollen wir sofort mit der Festlegung $\alpha = \frac{3}{2}$ beginnen und die Rechnung wird in folgender Weise gefällig durchgeführt werden.

$$
\begin{aligned}
\log a &= 0,1760913 \quad \text{und daher} \quad \alpha = 1,5000 \\
\log\log r &= 9,2457378 \\
\hline
\log\log \beta &= 9,4218291 \\
\hline
\log \beta &= 0,2641369 \quad \text{und daher} \quad \beta = 1,8371 \\
\log\log r &= 9,2457378 \\
\hline
\log\log \gamma &= 9,5098747 \\
\hline
\log \gamma &= 0,3235002 \quad \text{und daher} \quad \gamma = 2,1062 \\
\log\log r &= 9,2457378 \\
\hline
\log\log \delta &= 9,5692380 \\
\hline
\log \delta &= 0,3708839 \quad \text{und daher} \quad \delta = 2,3490 \\
\log\log r &= 9,2457378 \\
\hline
\log\log \varepsilon &= 9,6166217 \\
\hline
\log \varepsilon &= 0,4136392 \quad \text{und daher} \quad \varepsilon = 2,5920 \\
\log\log r &= 9,2457378 \\
\hline
\log\log \zeta &= 9,6593770 \\
\hline
\log \zeta &= 0,4564330 \quad \text{und daher} \quad \zeta = 2,8604 \\
\log\log r &= 9,2457378 \\
\hline
\log\log \eta &= 9,7021708 \\
\hline
\log \eta &= 0,5036991 \quad \text{und daher} \quad \eta = 3,1893 \\
\log\log r &= 9,2457378 \\
\hline
\log\log \vartheta &= 9,7494369 \\
\hline
\log \vartheta &= 0,5616127 \quad \text{und daher} \quad \vartheta = 3,6443.
\end{aligned}
$$

§6 Hier wachsen also die Terme unser Progression α, β, γ, δ etc. so langsam, dass wir zweifeln können, ob sie nicht gegen einem gewissen festen Grenzwert konvergieren; aber weil die letzten Differenzen offensichtlich wachsen, ist es notwendig, dass die Terme selbst schließlich immer weiter wachsen, woher sich schließen lässt, dass der Grenzwert, den wir suchen, unter $\frac{3}{2}$ liegt. Wir wollen also in gleicher Weise den Fall $r = \frac{4}{3}$ untersuchen, und mit $\alpha = \frac{4}{3}$ beginnend wird die Rechnung auf die folgende Weise aussehen:

$$\begin{array}{rl}
\log a = 0,1249387 & \text{und daher} \quad \alpha = 1,3333 \\
\underline{\log\log r = 9,0966971} & \\
\underline{\log\log \beta = 9,2216358} & \\
\log \beta = 0,1665850 & \text{und daher} \quad \beta = 1,4675 \\
\underline{\log\log r = 9,0966971} & \\
\underline{\log\log \gamma = 9,2632821} & \\
\log \gamma = 0,1833505 & \text{und daher} \quad \gamma = 1,5253 \\
\underline{\log\log r = 9,0966971} & \\
\underline{\log\log \delta = 9,2800476} & \\
\log \delta = 0,1905670 & \text{und daher} \quad \delta = 1,5508 \\
\underline{\log\log r = 9,0966971} & \\
\underline{\log\log \varepsilon = 9,2872641} & \\
\log \varepsilon = 0,1937600 & \text{und daher} \quad \varepsilon = 1,5623 \\
\underline{\log\log r = 9,0966971} & \\
\underline{\log \zeta\zeta = 9,2904571} & \\
\log \zeta = 0,1951898 & \text{und daher} \quad \zeta = 1,5674 \\
. &
\end{array}$$

Hier schrumpfen die Differenzen nun natürlich ununterbrochen; daher lässt sich hinreichend sicher schließen, dass die Terme unserer Progression nicht über eine gewisse feste Grenze hinaus vermehrt werden. Weil wir ja aber vermuten könnten, dass auch in diesem Fall die Differenzen wieder anwachsen werden, wird die Lösung des folgenden Problems jeden Zweifel ausräumen.

PROBLEM

Den Grenzwert ausfindig zu machen, sobald die Wurzel r welchen zu übersteigen beginnt, die Terme unserer Progression α, β, γ, δ etc. ins Unendliche wachsen.

LÖSUNG

§7 Es muss also der größte Wert der Wurzel r gesucht werden, für welchen die Terme unserer Reihe nicht ins Unendliche wachsen, sondern gegen einen gewissen endlichen Grenzwert konvergieren. Es bezeichne also ω den infinitesimalen Term unserer Reihe; weil dieser schon den gesuchten Grenzwert angenommen haben wird, ist es notwendig, dass der ihm folgende Term, welcher r^ω ist, jenem gleich ist, sodass wir diese Gleichung haben $r^\omega = \omega$; daraus muss der größte Wert, welchen der Buchstabe r annehmen kann, bestimmt werden.

§8 Weil also nach Nehmen von Logarithmen $\omega \log r = \log \omega$ wird, wird daher $\log r = \frac{\log \omega}{\omega}$ oder $r = \omega^{\frac{1}{\omega}}$ sein. Also muss der größte Wert gesucht werden, welchen dieser Bruch $\frac{\log \omega}{\omega}$ erhalten kann. Dass aber hier ein Maximum gegeben ist, wird daraus eingesehen, dass so für $\omega = 1$ wie $\omega = \infty$ dieser Bruch jeweils verschwindet. Daher werde also, um den Fall des Maximums zu finden, das Differential dieses Bruchs gleich Null gesetzt; zu diesem Zweck bezeichne $\log \omega$ den hyperbolischen Logarithmus von ω, dass sein Differential $\frac{d\omega}{\omega}$ gesetzt werden kann, und so wird zu dieser Gleichung $\log \omega = 1$ gelangt werden; daher, wenn e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist, welchen wir wissen $= 1$ zu sein, wird $\log r = \frac{1}{e}$ und daher $r = e^{\frac{1}{e}}$ sein.

§9 Auf diese Weise haben wir also schon gelernt, sooft die Wurzel r größer als dieser gefundene Wert $e^{\frac{1}{e}}$ angenommen wird, dass unsere Progression α, β, γ, δ, ε etc. ins Unendliche wachsen muss, andernfalls aber, wenn die Wurzel r unter diesem Wert liegt, dass die Reihe immer näher an einen bestimmten festen Grenzwert herankommt; dieser Grenzwert wird also für den gefundenen Fall $r = e^{\frac{1}{e}}$ entsprechend $\omega = e$ sein; dessen Richtigkeit ist umgekehrt daher klar, dass auf diese Weise der folgende Term

$$\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e$$

wird. Es wird hier nicht unnütz sein bemerkt zu haben, dass, während x irgendeine von e verschiedene größere oder kleinere Zahl bezeichnet, dass immer $x^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{1}{e}}$ ist. Um dies deutlicher zu sehen, wollen wir die Rechnung für einfachere Fälle durchführen; zu diesem Zweck wollen wir $x^{\frac{1}{x}} = z$ setzen und durch Nehmen von gewöhnlichen Logarithmen wird $\log z = \frac{\log x}{x}$ sein und daher weiter $\log\log z = \log\log x - \log x$ sein, woher der Wert von z für jedweden Fall sehr leicht berechnet wird. Zuerst ist freilich klar, dass für $x = 1$ genommen $z = 1$ sein wird; aber für die folgenden Werte wird die Rechnung gemäß der Formel $\frac{\log x}{x}$ so durchgeführt werden:

	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$
$\log x$	$0,3010300$	$0,4771213$	$0,6020600$	$0,6989700$	$0,7781512$
$\frac{\log x}{x}$	$0,1505150$	$0,1590404$	$0,1505150$	$0,1397940$	$0,1296919$
z	$1,4121$	$1,44225$	$1,41421$	$1,37973$	$1,34801$

Es ist aber klar, dass die Werte von z, während x über den Grenzwert $= e$ hinaus vermehrt wird, immer weiter schrumpfen und schließlich gegen die Einheit konvergieren; dann ist daraus aber auch ersichtlich, dass der größte Wert von z zwischen die Festlegungen $x = 2$ und $x = 3$ fällt, sodass daher klar ist, dass er größer ist als $1,44225$.

§10 Wir wollen also diesen größten Wert von z aus dem Fall

$$x = e = 2,718281828$$

suchen, und weil ja

$$\log z = \log\log e - \log e$$

ist, wird sich die Rechnung so verhalten: Wegen

$$\log e = 0,4342945$$

wird

$$\log\log e = 9,6377843$$

sein, davon subtrahiere man

$$\log e = 0,4342945;$$

es wird

$$\log\log z = 9,2034898$$

und

$$\log z = 0,1597680,$$

schließlich

$$z = 1,44467,$$

welcher Wert also näherungsweise $z = 1\frac{4}{9}$ ist.

§11 Wenn jemand diesen größten Wert von r genauer haben will, als dass die gewöhnlichen Logarithmustabellen ihm genügen, wird er selbigen mithilfe einer sehr schnell konvergierenden Reihe auf sehr angenehme Weise erhalten können; weil nämlich

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \text{etc.}$$

ist, wird der gesuchte Wert

$$e^{\frac{1}{e}} = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{2ee} + \frac{1}{6e^3} + \frac{1}{24e^4} + \text{etc.}$$

sein, für welche Reihe die einzelnen reziproken Potenzen von e verschiedenerorts zu vielen Dezimalstellen berechnet gefunden werden.

§12 Wenn also für r irgendeine Zahl kleiner als der gerade gefundene Wert $1,4447$ angenommen wird, dann wird die daraus resultierende Reihe α, β, γ, δ, ε etc. gewiss gegen einen bestimmten festen Grenzwert konvergieren; wenn dieser $= \varphi$ wird, wird er so definiert werden, dass $r^\varphi = \varphi$ und daher $r = \varphi^{\frac{1}{\varphi}}$ ist. Aus dem Vorhergehenden ist aber klar, dass immer zwei Werte von φ gegeben sind, woher auch dieselbe Wurzel r entspringen kann, wie in den oben entwickelten Fällen $x = 2$ und $x = 4$ denselben Wert für z ergeben haben; und diese zwei Werte von φ werden umso mehr voneinander abweichen, je mehr die angenommene Wurzel r vom gefundenen Grenzwert

$1,4447$ abweicht, weil ja beim Grenzwert selbst die beiden Werte zu einem verschmelzen. Dem Finden dieser Werte wollen wir also das folgende Problem widmen.

PROBLEM

Wenn für die Wurzel r irgendeine Zahl kleiner als der gefundene Grenzwert $e^{\frac{1}{e}} = 1,4446$ *angenommen wird, jene zwei Werte ausfindig zu machen, gegen welche unsere Progression* α, β, γ, δ *etc. konvergieren kann, oder die zwei Werte von* φ *zu suchen, dass* $r^\varphi = \varphi$ *wird; hier ist es dennoch notwendig zu bemerken, dass der Wert der Wurzel r größer als die Einheit genommen werden muss, weil ja die Werte kleiner als die Einheit einer eigenen Erläuterung bedürfen.*

LÖSUNG

§13 Hier wird es nicht gerade wenig befremdlich erscheinen, dass eine solche Gleichung $r^\varphi = \varphi$ zwei reelle Wurzeln besitzt, sooft r innerhalb der Grenzen 1 und $e^{\frac{1}{e}}$ enthalten ist, und die Analysis schreibt auch keine bestimmte Methode vor, diese zwei Werte zu finden; weil wir aber schon sicher wissen, dass zwei Werte von dieser Art gegeben sind, wollen wir den einen mit dem Buchstaben ψ bezeichnen, sodass auch $r^\psi = \psi$ ist; daher werden wir also durch Elimination des Buchstabens r diese Gleichung zwischen φ und ψ erlangen

$$\frac{\log \varphi}{\varphi} = \frac{\log \psi}{\psi}.$$

§14 Um nun diese Gleichung aufzulösen, wollen wir $\psi = p\varphi$ setzen, dass

$$\log \psi = \log p + \log \varphi$$

ist, woher man nach der Substitution

$$\log \varphi = \frac{\log p}{p-1}$$

findet, dann aber

$$\varphi = p^{\frac{1}{p-1}};$$

aber der andere Werte wird nun

$$\psi = p^{\frac{p}{p-1}}$$

sein; diese drücken also im Allgemeinen die beiden gesuchten Werte aus.

§15 Nachdem also die Zahl p nach Belieben genommen worden ist, berechnet man daher die beiden gesuchten Exponenten φ und ψ; aber die vorgelegte Wurzel r wird so durch r ausgedrückt werden, dass

$$\log r = \frac{p^{\frac{-1}{p-1}} \log p}{p-1}$$

ist. Daher kann aber umgekehrt aus der gegebenen Wurzel r die Zahl p nicht anders berechnet werden als durch Approximation; zu diesem Zweck wird es förderlich bemerkt zu haben, wenn $p = 1$ war, dass in diesem Fall die zwei Exponenten φ und ψ einander und daher der Zahl e gleich werden, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist; damit dies klarer wird, wollen wir $p = 1 + \omega$ setzen, wobei ω unendlich klein wird, und es wird

$$\varphi = (1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$$

und daher

$$\log \varphi = \frac{1}{\omega} \log(1+\omega)$$

sein. Weil also

$$\log(1+\omega) = \omega$$

ist, wird

$$\log \varphi = 1 \quad \text{sein und daher} \quad \varphi = e,$$

dann wird aber

$$\log r = \frac{1}{e} \quad \text{sein und daher} \quad r = e^{\frac{1}{e}},$$

welches der oben gefundene Grenzwert für die Wurzel r ist; in diesem Fall stimmen also die zwei Werte φ und ψ miteinander überein.

§16 Aber für die übrigen Fälle, in denen r ein kleinerer Wert zukommt, werden diese Werte immer mehr voneinander abweichen. Wenn wir also

$$p = 2$$

nehmen, dass

$$\psi = 2\varphi$$

ist, wird

$$\varphi = 2 \quad \text{und} \quad \psi = 4$$

hervorgehen, dann aber weiter

$$r = \sqrt{2},$$

welches der Fall ist, den wir oben genauer entwickelt haben, weil ja daher offensichtlich

$$(\sqrt{2})^2 = 2 \quad \text{und} \quad (\sqrt{2})^4 = 4$$

wird. Wenn wir aber

$$p = 3$$

nehmen, wird

$$\varphi = \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \psi = 3\sqrt{3}$$

werden, welche zwei Werte also für

$$\log r = \frac{\log 3}{2\sqrt{3}}$$

Geltung haben werden; die Wurzel selbst wird also

$$r = 3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

sein. Aber solche Ausdrücke, wo die Exponenten selbst irrational sind, pflegen zu den interscendenten Größen gezählt zu werden.

§17 Um also diesen Umstand zu vermeiden, wollen wir

$$p = 1 + \frac{1}{n}$$

setzen, während n eine sehr große Zahl bezeichnet, und es wird

$$\varphi = \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

und

$$\psi = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$$

sein; dann wird aber

$$\log r = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \log \frac{n+1}{n}$$

sein, woher der Wert von r auf angenehme Weise dargestellt werden kann. Aber für spezielle Fälle werden sich diese Werte so verhalten:

I. Wenn $n = 1$ ist, wird

$$\varphi = 2 \quad \text{und} \quad \psi = 4$$

sein; dann aber

$$r = \sqrt{2},$$

wie wir oben gesehen haben.

II. Wenn $n = 2$ ist, wird

$$\varphi = \frac{9}{4} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{27}{8}$$

sein; dann aber

$$\log r = \frac{8}{9} \log \frac{3}{2}$$

und daher

$$r = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{8}{9}};$$

daher wird nämlich offensichtlich

$$r^{\varphi} = \frac{9}{4} = \varphi \quad \text{und} \quad r^{\psi} = \frac{27}{8} = \psi.$$

III. Wenn $n = 3$ ist, wird

$$\varphi = \frac{64}{27} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{256}{81}$$

sein; dann wird aber

$$\log r = \frac{81}{64} \log \frac{4}{3}$$

und daher

$$r = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{81}{64}}$$

sein; daher wird nämlich

$$r^{\varphi} = \frac{64}{27} = \varphi \quad \text{und} \quad r^{\psi} = \frac{256}{81} = \psi$$

sein.

IV. Wenn $n = 4$ ist, wird

$$\varphi = \frac{625}{256} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{3125}{1024}$$

sein; daher wird aber

$$\log r = \frac{1024}{625} \log \frac{5}{4}$$

und daher

$$r = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1024}{625}}$$

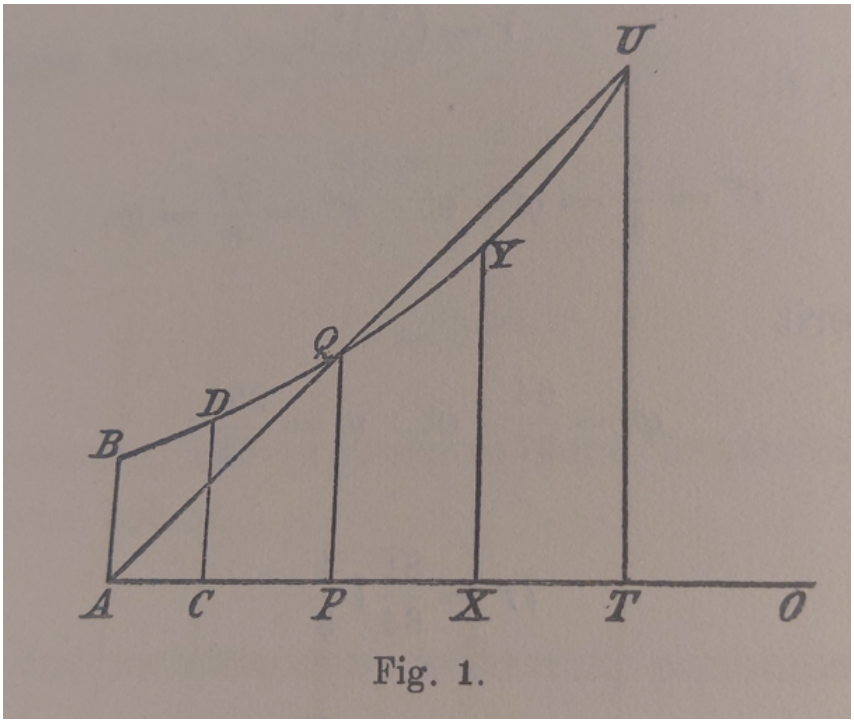
sein; daher wird aber

$$r^\varphi = \frac{625}{256} = \varphi \quad \text{und} \quad r^\psi = \frac{3125}{1024} = \psi$$

werden.

Geometrische Lösung desselben Problems

§18 Über der Achse AO (Fig. 1) beschreibe man eine Kurve solcher Art, für die, wenn die Abszisse $AX = x$ und die Ordinate $XY = y$ gesetzt wird, $y = r^x$ sei, welche Kurve also eine logarithmische sein wird, und für den Anfang $x = 0$ wird die erste Ordinate $AB = 1$ werden; dann wird aber für die Abszisse $AC = 1$ die Ordinate $CD = r$ sein, welche also unsere Wurzel r darbiete;



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version

und so werden die Abszissen x uns die Exponenten der Potenzen r^x geben, die Ordinaten y werden hingegen die Potenzen selbst darbieten. Nun ziehe man vom Anfangspunkt A die Gerade AQU, welche mit der Achse einen halbrechten Winkel bildet und welche die Kurve in den zwei Punkten Q und U schneiden wird, wenn freilich $r < e^{\frac{1}{e}}$ war. Auf diese Weise wird für den Punkt Q die Ordinate $AP = \varphi$ und zugleich $PQ = r^{\varphi} = \varphi$ sein. In gleicher Weise wird für den anderen Schnittpunkt U die Abszisse $AT = \psi$ und zugleich $TU = r^{\psi} = \psi$ sein.

§19 Vom Anfang aus betrachtet wird die Kurve vom Punkt B bis zum Punkt Q also über die Gerade AQ liegen; aber vom Punkt Q aus bis hin zu U fällt die Kurve unter diese Gerade, aber von der Grenze U aus weiter verlängert wird sie im höheren Bereich bis ins Unendliche ansteigen. Daher sieht man ein, solange die Abszisse x kleiner war als φ, dass dann die Ordinate $y = r^x$ größer sein wird als x und daher nähere an den Grenzwert PQ herankommen wird, bis schließlich für $x = AP = \varphi$ genommen sogar $y = r^{\varphi} = \varphi$ werden wird. Wannimmer aber x die Zahl φ übersteigt, so dennoch, dass sie kleiner ist als ψ, dann wird die Ordinate y kleiner sein als x und daher näher an den Grenzwert φ herankommen wird; und dies wird geschehen, solange die Abszisse x kleiner war als ψ; aber nach Nehmen von $x = \psi$ wird auch $y = \psi$ werden. Schließlich, wenn $x > \psi$ genommen wird, dann wird die Ordinate y offensichtlich größer sein als x und stärker vom Grenzwert ψ abweichen und sogar schließlich bis ins Unendliche verlängert werden.

§20 Hier zeigt sich also das einzigartige Phänomen, welches darin besteht, dass, solange die Abszisse x kleiner genommen wird als der größere Grenzwert ψ, dann die Ordinate y immer näher an den kleineren Grenzwert φ herankommt als x, und dies wird geschehen, solange $x < \psi$ war, und nur bei diesem anderen Grenzwert $x = \psi$ wird die Ordinate auch $y = \psi$ werden. Sobald nämlich die Abszisse x auch nur minimal von ψ abweicht, wird die Ordinate y noch stärker von ψ abweichen.

§21 Also unterscheiden sich die beiden oben angegebenen Werte φ und ψ im Wesentlichen darin voneinander, dass, wenn x größer oder kleiner genommen wird als φ, dann y näher an φ herankommt; das Gegenteil passiert aber bei dem anderen Grenzwert ψ, sobald x von welchem abweicht, wird y sogar noch stärker abweichen.

§22 Damit dieser gewaltige Unterschied etwas klarer wird, wollen wir den Fall betrachten, in welchem

$$r = \sqrt{2}, \quad \varphi = 2 \quad \text{und} \quad \psi = 4$$

ist; und es ist schon hinreichend klar, wenn der erste Term α unserer Progression α, β, γ, δ etc. kleiner als 2 angenommen wird, dass dann die folgenden β, γ, δ etc. immer näher an 2 herankommen werden, weil ja für $\alpha = 2$ alle denselben Wert erhalten werden. Wir wollen also $\alpha > 2$ nehmen, aber dennoch kleiner als 4, und wir wollen die folgenden Werte β, γ, δ etc. aus der Formel $\log\log\beta = \log\alpha + \log\log r$ suchen, für welche

$$\log r = 0,1505150 \quad \text{und} \quad \log\log r = 9,1775798$$

ist. Zu diesem Zweck wollen wir dem ersten Term α den Wert 3 zuteilen, natürlich genau in der Mitte zwischen den Grenzen 2 und 4, und die Rechnung wird sich auf die folgende Weise verhalten:

$$\begin{array}{rrll}
\text{zu} & \log a = 0,4771213 & \text{und daher} & \alpha = 3,0000 \\
\text{add. man} & \log\log r = 9,1775798 & & \\ \cline{2-2}
 & \log\log\beta = 9,6547011 & & \\ \cline{2-2}
 & \log\beta = 0,4515451 & \text{und daher} & \beta = 2,8284 \\
 & \log\log r = 9,1775798 & & \\ \cline{2-2}
 & \log\log\gamma = 9,6291249 & & \\ \cline{2-2}
 & \log\gamma = 0,4257209 & \text{und daher} & \gamma = 2,6651 \\
 & \log\log r = 9,1775798 & & \\ \cline{2-2}
 & \log\log\delta = 9,6033007 & & \\ \cline{2-2}
 & \log\delta = 0,4011442 & \text{und daher} & \delta = 2,5185 \\
 & \log\log r = 9,1775798 & & \\ \cline{2-2}
 & \log\log\varepsilon = 9,5787240 & & \\ \cline{2-2}
 & \log\varepsilon = 0,3790740 & \text{und daher} & \varepsilon = 2,3937.
\end{array}$$

Daher ist es klar, dass diese Terme immer stärker zum Grenzwert 2 hinlaufen.

§23 Damit aber niemand glaubt, dass dies anders sein wird, wenn α ein nur wenig von 4 abweichender Wert zugeteilt wird, wollen wir den Fall $\alpha = 3,99$ entwickeln und die Rechnung wird sich auf die folgende Weise verhalten:

$$\begin{array}{r l}
\log a = 0,6009729 & \text{und daher } \alpha = 3,9900 \\
\underline{\log\log r = 9,1775798} & \\
\underline{\log\log \beta = 9,7785527} & \\
\log \beta = 0,6005548 & \text{und daher } \beta = 3,9862 \\
\underline{\log\log r = 9,1775798} & \\
\underline{\log\log \gamma = 9,7781346} & \\
\log \gamma = 0,5999770 & \text{und daher } \gamma = 3,9809 \\
\underline{\log\log r = 9,1775798} & \\
\underline{\log\log \delta = 9,7775568} & \\
\log \delta = 0,5991793 & \text{und daher } \delta = 3,9736 \\
\underline{\log\log r = 9,1775798} & \\
\underline{\log\log \varepsilon = 9,7767591} & \\
\log \varepsilon = 0,5980797 & \text{und daher } \varepsilon = 3,9635.
\end{array}$$

Hier ist es also auch ersichtlich, dass die Terme β, γ, δ, ε etc, immer mehr vom Grenzwert $\psi = 4$ weglaufen und immer näher an den deren anderen Grenzwert $\varphi = 2$ herankommen.

§24 Indes ist dennoch offensichtlich, wenn genau $\alpha = 4$ gesetzt wird, dass dann alle folgenden Terme völlig dieselben Werte beibehalten werden, sobald aber der Buchstabe α auch nur ein wenig den Grenzwert 4 überschreitet, dass die folgenden Terme ihn immer mehr übersteigen werden, wie die folgende Rechnung für $\alpha = 4,01$ zeigen wird.

$$
\begin{array}{rl}
\log a = 0,6031444 & \text{und daher } \alpha = 4,0100 \\
\log\log r = 9,1775798 & \\
\hline
\log\log \beta = 9,7807242 & \\
\hline
\log \beta = 0,6035652 & \text{und daher } \beta = 4,0139 \\
\log\log r = 9,1775798 & \\
\hline
\log\log \gamma = 9,7811450 & \\
\hline
\log \gamma = 0,6041502 & \text{und daher } \gamma = 4,0193 \\
\log\log r = 9,1775798 & \\
\hline
\log\log \delta = 9,7817300 & \\
\hline
\log \delta = 0,6049645 & \text{und daher } \delta = 4,0268 \\
\log\log r = 9,1775798 & \\
\hline
\log\log \varepsilon = 9,7825443 & \\
\hline
\log \varepsilon = 0,6061000 & \text{und daher } \varepsilon = 4,0374.
\end{array}
$$

Daher ist klar, dass die Natur der Grenze $\psi = 4$ dem Grenzwert eines instabilen Gleichgewichts ähnlich ist, in welchem sich eine auf die Spitze gestellte Nadel befinden kann; aber sobald sie auch nur ein bisschen gestört wird, wird sie vollkommen umkippen.

PROBLEM

Wenn die Wurzel r kleiner war als die oben angegebene Grenze $e^{\frac{1}{e}}$, den Exponenten ω ausfindig zu machen, dass $r^{\omega} = \omega$ wird.

LÖSUNG

§26 Weil, was auch immer in der komplexen Analysis auftritt, in der Form $x + y\sqrt{-1}$ enthalten ist, sodass so x wie y reelle Größen sind, wollen wir

$$\omega = x + y\sqrt{-1}$$

setzen, sodass

$$r^{x+y\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

oder

$$r^x \cdot r^{y\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

sein muss, aus welcher Gleichung die beiden Buchstaben x und y gefunden werden müssen.

§27 Weil aber bekannt ist, dass

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z$$

ist, setze man

$$r^{y\sqrt{-1}} = e^{z\sqrt{-1}},$$

dass

$$y\sqrt{-1} \cdot \log r = z\sqrt{-1}$$

wird – wegen $\log e = 1$ –, und daher wird $z = y \log r$ und so werden wir

$$r^{y\sqrt{-1}} = \cos y \log r + \sqrt{-1} \cdot \sin y \log r$$

haben, nach Einsetzen welches Wertes unsere Gleichung

$$r^x(\cos y \log r + \sqrt{-1} \cdot \sin y \log r) = x + y\sqrt{-1}$$

sein wird, woher, weil die reellen und imaginären Anteile jeweils gleich sein müssen, diese zwei Gleichungen entspringen

$$\text{I.} \quad r^x \cos y \log r = x,$$
$$\text{II.} \quad r^x \sin y \log r = y,$$

deren zweite durch die erste geteilt

$$\tan y \log r = \frac{y}{x}$$

liefert, aus welcher wir

$$x = \frac{y}{\tan y \log r}$$

berechnen, sodass aus dem bekannten Wert von y der Wert von x angegeben werden kann.

§28 Aber für das Finden von y nehme man die Logarithmen der zweiten Gleichung, welche

$$x \log r + \log \sin y \log r = \log y$$

und daher

$$\frac{y \log r}{\tan y \log r} + \log \sin y \log r = \log y$$

oder

$$\frac{y \log r}{\tan y \log r} = \log \frac{y}{\sin y \log r}$$

geben werden; und so ist die ganze Aufgabe darauf zurückgeführt worden, dass die Größe y aus der gegebenen Wurzel r gefunden wird. Damit diese Relation aber gefälliger ausgedrückt werden kann, wollen wir

$$y \log r = \theta$$

setzen, dass wir diese Gleichung erhalten

$$\frac{\theta}{\tan \theta} = \log \frac{y}{\sin \theta},$$

woher wir

$$\log y = \log \sin \theta + \frac{\theta}{\tan \theta}$$

und daher

$$y = e^{\theta \cot \theta} \sin \theta$$

und daraus weiter

$$\log r = \frac{\theta e^{-\theta \cot \theta}}{\sin \theta}$$

berechnen, und daher wird schließlich

$$x = e^{\theta \cot \theta} \cos \theta$$

sein.

§29 Es wäre freilich zu wünschen, dass aus der gegebenen Wurzel r der Winkel θ bestimmt werden könnte; aber wir müssen zufrieden sein, dass daraus aus einem beliebigen Winkel von θ ohne Schwierigkeiten die Wurzel gefunden werden kann, wo freilich leicht eingesehen wird, dass für den äußersten Wert $r = e^{\frac{1}{e}}$, wo das Imaginäre beginnt, $y = 0$ sein muss, was durch Setzen von $\theta = 0$ passiert, in welchem Fall wegen

$$\theta \cot \theta = \frac{\theta \cos \theta}{\sin \theta} = 1$$

natürlich

$$x = e$$

sein wird, wie es die Natur der Sache erfordert, während natürlich $r^e = e$ wird; in der Tat wird daraus $\log r = \frac{1}{e}$ hervorgehen, als logische Konsequenz $r = e^{\frac{1}{e}}$. Weil wir aber hier angenommen haben, dass der Wert von r größer sein kann als $e^{\frac{1}{e}}$, werden diese Fälle hervorgehen, wenn dem Winkel θ größere Winkel zugeteilt werden. Damit dies klarer wird, wollen wir den Winkel θ als sehr klein ansetzen, dass

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3$$

und

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

ist, woher

$$\theta \cot \theta = \frac{\theta \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1 - \frac{1}{2}\theta\theta}{1 - \frac{1}{6}\theta\theta} = 1 - \frac{1}{3}\theta\theta$$

wird, und daher wird

$$e^{\theta \cot \theta} = e \cdot e^{-\frac{1}{3}\theta\theta} = e\left(1 - \frac{1}{3}\theta^2\right)$$

sein, von welchem Wert wir

$$y = e\left(1 - \frac{5}{6}\theta^2\right)$$

und

$$y = e\theta\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right),$$

berechnen und daher, weil ja

$$\log r = \frac{\theta}{y}$$

ist, wird

$$\log r = \frac{1}{e\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)} = \frac{1 + \frac{1}{2}\theta^2}{e}$$

sein, woher klar ist, dass $\log r > \frac{1}{e}$ und daher $r > e^{\frac{1}{e}}$ sein wird, und man sieht zugleich ein, einen wie großen Wert auch immer wir r zuteilen wollen, dass für θ immer ein entsprechender Winkel angegeben werden kann, weil sein Wert ja bis ins Unendliche vermehrt werden wird, wenn man

$$\theta = 180^\circ = \pi$$

nimmt. Hier tritt in ein Bezug auf die übrigen bemerkenswerter Fall auf, wannimmer man

$$\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

nimmt; denn dann wird wegen $\cot\theta = 0$ auch $x = 0$ und $y = 1$ und daher weiter $\log r = \frac{\pi}{2}$ und schließlich

$$r = e^{\frac{\pi}{2}}$$

werden; dann wird also

$$r^{x+y\sqrt{-1}} = e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$$

werden, was hervorragend mit den seit einiger Zeit bekannten Formeln übereinstimmt, nach welchen nach Nehmen von Logarithmen

$$\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1} = \log\sqrt{-1}$$

oder

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{\log\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$$

oder auch

$$\pi = \frac{\log(-1)}{\sqrt{-1}}$$

war.

Betrachtung der Fälle, in denen die Wurzel r kleiner als die Einheit genommen wird

§30 Hier ist vor Allem zu bemerken, dass alle Terme unserer Reihe α, β, γ, δ, ε etc. kleiner als die Einheit betrachtet werden können; denn wie groß auch immer der erste α angenommen wird, wie wenn $\alpha = 10$ ist, der zweite $\beta = r^{10}$ wird ein umso kleinerer Bruch sein, je größer α war. Deswegen, damit die mit Logarithmen durchzuführende Rechnung nicht allzu sehr durcheinander gebracht wird, wollen wir so anstelle der Wurzel r wie der einzelnen Terme unserer Progression Brüche in die Rechnung einführen und es sei

$$r = \frac{1}{s}, \quad \alpha = \frac{1}{a}, \quad \beta = \frac{1}{b}, \quad \gamma = \frac{1}{c}, \quad \delta = \frac{1}{d} \quad \text{etc.},$$

und weil

$$\beta = r^{\alpha}$$

ist, wird

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{s^{\frac{1}{a}}}$$

und daher

$$s^{\frac{1}{a}} = b$$

sein. Mit Logarithmen wird also

$$\frac{1}{a}\log s = \log b \quad \text{oder} \quad \log s = a \log b$$

sein, weiter

$$\log \log s = \log a + \log \log b$$

und daher

$$\log \log b = \log \log s - \log a,$$

mithilfe welcher Formel man aus den gegebenen s und a dann b findet; und in gleicher Weise wird

$$\log \log c = \log \log s - \log b$$

und

$$\log \log d = \log \log s - \log c$$

sein und so weiter.

§31 Wir wollen nun den Fall an einem Beispiel aufzeigen und es sei $r = \frac{1}{2}$ und man nehme $\alpha = \frac{1}{2}$; es wird

$$s = 2 \quad \text{und} \quad a = 2$$

sein, woher sich die Rechnung so verhalten wird:

$$
\begin{array}{rrl}
\text{von} & \log\log s = 9,4786098 & \\
\text{subtr. man} & \log a = 0,3010300 & \text{da ja} \quad \alpha = 0,5000, \\
\hline
 & \log\log b = 9,1775798 & \\
\hline
 & \log b = 0,1505150 & \text{daher} \quad \log\beta = 9,8494850, \quad \text{daher} \quad \beta = 0,70711 \\
 & \log\log s = 9,4786098 & \\
\hline
 & \log\log c = 9,3280948 & \\
\hline
 & \log c = 0,2128604 & \text{daher} \quad \log\gamma = 9,7871396, \quad \text{daher} \quad \gamma = 0,61255 \\
 & \log\log s = 9,4786098 & \\
\hline
 & \log\log d = 9,2657494 & \\
\hline
 & \log d = 0,1843951 & \text{daher} \quad \log\delta = 9,8156049, \quad \text{daher} \quad \delta = 0,65404 \\
 & \log\log s = 9,4786098 & \\
\hline
 & \log\log e = 9,2942147 & \\
\hline
 & \log e = 0,1968859 & \text{daher} \quad \log\varepsilon = 9,8031141, \quad \text{daher} \quad \varepsilon = 0,63550 \\
 & \log\log s = 9,4786098 & \\
\hline
 & \log\log f = 9,2817239 & \\
\hline
 & \log f = 0,1913039 & \text{daher} \quad \log\zeta = 9,8086961 \quad \text{daher} \quad \zeta = 0,64372 \\
 & \log\log s = 9,4786098 & \\
\hline
 & \log\log g = 9,2873059 & \\
\hline
 & \log g = 0,1937786 & \text{daher} \quad \log\theta = 9,8062214, \quad \text{daher} \quad \theta = 0,64006
\end{array}
$$

§32 Daher zeigt sich also, dass die Terme unserer Progression immer mehr gegen einen bestimmten festen Wert konvergieren, welchen sie abwechseln übersteigen und unterschreiten; dieser Wert wird ungefähr $0,64$ sein, sobald zu welchem gelangt worden ist, alle folgenden selbigem gleich bleiben werden. Um diesen festen Wert zu finden, bemerken wir, dass die Logarithmen der Zahlen a, b, c, d etc. gegen den Näherungswert $0,192$ konvergieren; daher, wenn der wahre Wert $\log m$ ist, ist notwendig, dass

$$\log m + \log\log m = \log\log s$$

ist; diese Untersuchung lässt sich aber nicht anders als durch Probieren in Angriff nehmen, was wir für einige Annahmen konkret durchführen werden.

$\log m =$	$0,192$	$0,1925$	$0,1928$	$0,1929$	$0,1930$	$0,1931$
addiere $\log\log m =$	$9,2833012$	$9,2844307$	$9,2851070$	$9,2853322$	$9,2855573$	$9,2857823$
es musste gelten	$9,4753012$	$9,4749307$	$9,4779070$	$9,4782322$	$9,4785573$	$9,4788823$
es ist aber $\log\log s =$	$9,4786098$	$9,4786098$	$9,4786098$	$9,4786098$	$9,4786098$	$9,4786098$
Fehler	$-\ 0,0033086$	$-\ 0,0016791$	$-\ 0,0007028$	$-\ 0,0003776$	$-\ 0,0000525$	$+\ 0,0002725$

Es ist also klar, dass der wahre Wert zwischen den beiden letzten Annahmen $0,1930$ und $0,1931$ liegen muss, deren Differenz $0,0001$ ist, aus welcher die Differenz der Fehler als $0,0003250$ entspringt; es muss aber $0,0002200$ sein; daher wie die Summe der Fehler zur Differenz der Annahmen, so der vorletzte Fehler zum Übertrag der Wahrheit über die vorletzte; deshalb wird der wahre Wert $\log m = 0,1930161$ sein, dessen Komplement $9,8069839$ ist, dem der gesuchte Term $0,64119$ der Progression zukommt, an welchen die Terme in alternierender Weise immer näher herankommen.

§33 Aus diesen Erläuterungen wird eingesehen, dass immer ein Exponent ω bestimmt werden kann, dass $r^{\omega} = \omega$ ist, oder für $\omega = \frac{1}{z}$, dass $s^{\frac{1}{z}} = z$ oder $s = z^z$ ist. Weil ja s eine Zahl größer als die Einheit ist, wird man immer eine Zahl z von solcher Art angeben können, dass $z^z = s$ ist.

§34 In dem zuvor entwickelten Beispiel, in welchem $r = \frac{1}{2}$ war, werden die Terme unserer Progression immer näher an einen gewissen fixen Wert herankommen. Aber hier tritt ein riesiger Unterschied auf; Wannimmer für r ein sehr kleiner Bruch genommen wird, wie wenn wir $r = \frac{1}{20}$ oder $s = 20$ nehmen und die Rechnung wie oben durchführen; mit $a = 2$ beginnend wird sich wegen $\log s = 1,310300$ die Rechnung so verhalten:

$$
\begin{array}{lrll}
\text{vom} & \log\log s = 1,1142873 & & \\
\text{subtr. man} & \underline{\log a = 0,3010300} & \text{daher} & \alpha = 0,5000, \\
 & \underline{\log\log b = 9,8132573} & & \\
 & \log b = 0,6505150 & \text{daher} & \log\beta = 9,3494840, \quad \text{daher} \quad \beta = 0,22361 \\
 & \underline{\log\log s = 0,1142873} & & \\
 & \underline{\log\log c = 9,4637724} & & \\
 & \log c = 0,2909192 & \text{daher} & \log\gamma = 9,7090808, \quad \text{daher} \quad \gamma = 0,51178 \\
 & \underline{\log\log s = 0,1142873} & & \\
 & \underline{\log\log d = 9,8233682} & & \\
 & \log d = 0,6658373 & \text{daher} & \log\delta = 9,3341627, \quad \text{daher} \quad \delta = 0,21586 \\
 & \underline{\log\log s = 0,1142873} & & \\
 & \underline{\log\log e = 9,4484500} & & \\
 & \log e = 0,2808342 & \text{daher} & \log\varepsilon = 9,7191658, \quad \text{daher} \quad \varepsilon = 0,52380 \\
 & \underline{\log\log s = 0,1142873} & & \\
 & \underline{\log\log f = 9,8334531} & & \\
 & \log f = 0,6814800 & \text{daher} & \log\zeta = 9,3185200 \quad \text{daher} \quad \zeta = 0,20822 \\
 & \underline{\log\log s = 0,1142873} & & \\
 & \underline{\log\log g = 9,4328073} & & \\
 & \log g = 0,2708990 & \text{daher} & \log\zeta = 9,7291010, \quad \text{daher} \quad \eta = 0,53592 \\
\end{array}
$$

etc.

§35 Daher wird also deutlich erkannt, dass die Terme dieser Progression immer weiter voneinander abweichen und alternierend zu zwei festen Werten streben, der größere von welchen $> 0,53592$ sein wird, der kleinere wird hingen $< 0,20822$ sein. Dieses einzigartige Phänomen wollen wir ohne jedwede Rechnung in diesem einfachen Beispiel betrachten, in welchem

$$r = \frac{1}{16} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

ist; dann wird nämlich

$$\beta = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}, \quad \gamma = r^{\beta} = \frac{1}{2}, \quad \delta = r^{\gamma} = \frac{1}{4} \quad \text{etc.}$$

sein; also werden die Terme abwechselnd $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ sein. Um also diese zwei festen Grenzen ausfindig zu machen, sooft solche freilich auftreten, wollen wir sie mit den Buchstaben φ und ψ bezeichnen, so dass

$$r^{\varphi} = \psi \quad \text{und} \quad r^{\psi} = \varphi$$

ist, oder wenn wir

$$r = \frac{1}{s}, \quad \varphi = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{1}{y}$$

setzen, werden für den Wert s zwei Zahlen x und y verlangt, dass

$$s = x^{y} \quad \text{und} \quad s = y^{x}$$

ist.

§36 Nach Nehmen von Logarithmen wird also zuerst

$$\log s = y \log x \quad \text{und} \quad \log s = x \log y$$

sein, sodass

$$y \log x = x \log y$$

sein muss. Man setze hier $y = px$ und es wird

$$p \log x = \log p + \log x$$

werden, woher man

$$\log x = \frac{\log p}{p-1}$$

und daraus

$$x = p^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{sowie} \quad y = p^{\frac{p}{p-1}}$$

berechnet; weiter wird man aber

$$\log s = \frac{p^{\frac{p}{p-1}} \log p}{p-1}$$

haben.

§37 Daher lernen wir nun zuerst, dass der Fall von zwei festen Grenzwerten nur Geltung haben kann, wenn der Wert von s in dieser Gleichung enthalten ist

$$\log s = \frac{p^{\frac{p}{p-1}} \log p}{p-1};$$

aber dann werden die beiden Grenzwerte

$$x = p^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{und} \quad y = p^{\frac{p}{p-1}}$$

sein, welche also umso mehr voneinander abweichen werden, je größer die Zahl für p angenommen wird; es wird hilfreich sein, einige Fälle hinzugefügt zu haben. Es sei zuerst

$$p = 2$$

und es wird

$$x = 2 \quad \text{und} \quad y = 4$$

und daher

$$s = 16$$

sein, sodass

$$r = \frac{1}{16}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{1}{4}$$

ist, welchen Fall wir schon oben betrachtet haben; es sei nun

$$p = \frac{3}{2}$$

und es wird

$$x = \frac{9}{4} \quad \text{und} \quad y = \frac{27}{8}$$

sein, dann aber

$$s = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}};$$

als logische Konsequenz wird

$$r = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{9}{4}}, \quad \varphi = \frac{4}{9} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{8}{27}$$

sein.

§38 Daher werden wir auch den Grenzwert selbst angeben können, sobald die Zahl s welchen übersteigt, die beiden festen Werte x und y sich voneinander entfernen werden. Es ist aber ersichtlich, dass dieser Grenzwert dort liegen muss, wo die beiden Zahlen x und y gleich sind, oder wo $p = 1$ ist; oben haben wir aber gesehen, dass in diesem Fall $x = e$ und $y = e$ wird, während e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist; dann wird aber

$$s = e^e$$

sein; deswegen werden wir

$$r = \frac{1}{e^e} \quad \text{und} \quad \varphi = \psi = \frac{1}{e}$$

haben; daher ist klar, dass zwei Werte von dieser Art immer auftreten, wenn die Wurzel r kleiner als $\frac{1}{e^e}$ war.

§39 Es wird also der Mühe Wert sein, diesen Grenzwert genauer zu bestimmen; weil also

$$e = 2{,}7182818, \quad \log e = 0{,}4342945 \quad \text{und} \quad \log s = e \log e$$

ist, wird

$$\log \log s = \log e + \log \log e = 0{,}0720788$$

und deshalb

$$\log s = 1,1805321$$

sein, daraus

$$\log r = 9,8194679,$$

als logische Konsequenz

$$r = 0,065988 \quad \text{oder auch} \quad r = \frac{1}{15,154};$$

daher sieht man ein, solange die Wurzel r größer war als dieser Bruch $\frac{1}{15,154}$, dass dann alle Terme unserer Progression immer gegen einen bestimmten festen Grenzwert streben; aber ansonsten, wenn $r < \frac{1}{15,154}$ war, dann wird die Annäherung zu zwei Grenzwerten alternierend erfolgen.

Über den Lehrsatz, welchen der illustre Marchio de Condorcet uns mitgeteilt hat

§40 Nachdem diese bemerkenswerten Phänomene betrachtet worden sind, wird es um vieles leichter sein, die Tragweite des erwähnten Theorems über diesen Gegenstand zu verstehen; aber der illustre Herr hat eine bestimmte unendliche Reihe beschrieben, deren Terme nach einem dermaßen komplexen Gesetz fortschreiten müssen, dass ihre Natur sich nur unter Aufbringen höchster Geduld erkennen lässt, er versichert aber, dass die Summe eine solche iterierte Formel von Potenzen ist, die wir bisher genauer betrachtet haben; einen Beweis hat er freilich nicht beigefügt, aber es ist offenkundig, dass sie per Umkehrung aus der Lösung des folgenden Problems gefunden werden muss.

Problem

Wenn, nachdem nach Belieben eine Wurzel r genommen worden ist, diese Progression gebildet worden ist α, β, γ, δ, ε *etc., sodass* $\beta = r^\alpha$, $\gamma = r^\beta$, $\delta = r^\gamma$ *etc. ist, dann die Progression ausfindig zu machen, die resultieren wird, wenn der erste Exponent* α *um eine gewisse Größe vermehrt oder vermindert wird.*

LÖSUNG

§41 Wir wollen also festlegen, dass der erste Exponent $= \alpha(1+z)$ ist, und in gleicher Weise wollen wir für die folgenden Terme festlegen

$$\begin{aligned} r^{\alpha(1+z)} &= \beta(1+z'), \\ r^{\beta(1+z')} &= \gamma(1+z''), \\ r^{\gamma(1+z'')} &= \delta(1+z''') \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

auf welche Weise sich unendlich weit fortschreiten lassen wird; aber den letzten Term von dieser Reige hat der illustre Autor unbestimmt angenommen.

§42 Weil also

$$r^{\alpha(1+z)} = \beta(1+z')$$

ist, wird man daher wegen $r^{\alpha} = \beta$

$$r^{\alpha z} = (1+z')$$

haben, woher die Größe z' gefunden werden muss; weil also $r^{\alpha z}$ mit einer unendlichen Reihe

$$1 + \alpha z \log r + \frac{1}{2}\alpha^2 z^2 (\log r)^2 + \frac{1}{6}(\alpha z \log r)^3 + \frac{1}{24}(\alpha z \log r)^4 + \frac{1}{120}(\alpha z \log r)^5 + \text{etc.}$$

ist, erlangen wird diese z' gleiche Bestimmung, nachdem der erste Term der Reihe abgezogen worden ist. Wir wollen aber der Kürze wegen

$$\alpha z \log r = v$$

setzen, dass

$$z' = v + \frac{1}{2}vv + \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{24}v^4 + \frac{1}{120}v^5 + \text{etc.}$$

wird. Weil aber $\alpha \log r = \log \beta$ ist, wird

$$v = z \log \beta$$

sein und so wird der Wert von z' leicht bestimmt werden.

§43 Weil in gleicher Weise

$$r^{\beta(1+z')} = \gamma(1+z'')$$

ist, wird wegen $r^\beta = \gamma$, wenn wir der Kürze wegen

$$\beta z' \log r = v'$$

setzen, sodass

$$v' = z' \log \gamma$$

ist, erschlossen, dass

$$z'' = v' + \frac{1}{2}v'^2 + \frac{1}{6}v'^3 + \frac{1}{24}v'^4 + \frac{1}{120}v'^5 + \text{etc.}$$

sein wird; wenn wir in gleicher Weise weiter

$$\gamma z'' \log r = z'' \log \delta = v''$$

setzen, wird

$$z''' = v'' + \frac{1}{2}v''^2 + \frac{1}{6}v''^3 + \frac{1}{24}v''^4 + \frac{1}{120}v''^5 + \text{etc.}$$

Wenn weiter

$$v''' = z''' \log \varepsilon$$

wird, wird

$$z'''' = v + \frac{1}{2}v'''^2 + \frac{1}{6}v'''^3 + \frac{1}{24}v'''^4 + \frac{1}{120}v'''^5 + \text{etc.}$$

sein, welche Progression nun sehr leicht durchschaut wird; und wenn wir immer wieder die Größe z einsetzen wollen, besteht kein Zweifel, dass die vom illustren Condorcet vorgelegte Reihe entspringt.